ANALISI II ING. INFORMATICA 2022-2023 (591AA) - APPELLO ESTIVO II

30/06/2023

Nome e cognome:____

Matricola:____

Durata: 2 ore. Nessun materiale è consultabile.
Nessun device deve essere usato.

Esercizio 1. Si consideri la funzione $f(x,y) = x^2+y^2-4x$. Dire se esistono il massimo e il minimo assoluto di f sul dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } x^2 + y^2 - 6x + 5 \leq 0\},$$

eventualmente calcolarli e stabilire il valore massimo e minimo della funzione data.

Esercizio 2.

(a) Sia $r(t) = (x(t), z(t))$, con $t \in [a,b]$ e $x(t) > 0$, una curva regolare nel piano x, z. Scrivere una parametrizzazione della superficie ottenuta facendo ruotare la curva $r(t)$ attorno all'asse z di un angolo pari a 2π.

(b) Calcolare l'area della superficie ottenuta facendo ruotare la curva $r(t) = (t, t^2)$, $t \in [1,2]$, contenuta nel piano x, z attorno all'asse z di un angolo pari a π.

Esercizio 3.
Verificare che per la funzione

$$f(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - \cos x$$

vale il Teorema del Dini nel punto $(0,0)$, ed approssimare la funzione implicita con Taylor fino al secondo ordine.

Esercizio 4.

(a) Dare la definizione di raggio di convergenza per una serie di potenze $\sum a_n (x-x_0)^n$.

(b) Determinare il raggio di convergenza per la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{-n^2} \frac{x^n}{3^n}.$$

Soluzioni

1. Il dominio D sono i punti del cerchio (compreso il bordo) di centro $C = (3, 0)$ e raggio $r = 2$. È chiuso e limitato, f è continua (funzione polinomila), quindi per Weierstrass ammette max e min assoluti. Per i punti interni applichiamo Fermat. $\nabla f = (2x - 4, 2y)$ ed è nullo se e solo se $(x, y) = (2, 0)$. Tale punto è interno, quindi possiamo procedere allo studio dell'Hessiano per determinarne la natura. $\mathrm{Hess}_f(2, 0) = 2\mathrm{Id}$, quindi tale punto è di minimo. Sul bordo di D si ha che $y^2 = 4 - (x - 3)^2$, quindi sul bordo la funzione si riduce a $f|_{\partial D} = g(x) := x^2 - 4x + 4 - (x - 3)^2 = 2x - 5$, con $x \in [1, 5]$, che ha minimo in $x = 1$ e massimo in $x = 5$. Quindi per f si hanno i punti: $(x, y) = (1, 0)$ e $(x, y) = (5, 0)$. Valutando f nei punti trovati si ha

$$f(2, 0) = -4, \quad f(1, 0) = -3, \quad f(5, 0) = 5.$$

Conclusione: $(2, 0)$ minimo assoluto, $(5, 0)$ massimo assoluto.

2a. Una parametrizzazione è data da

$$\phi(t, \theta) = \begin{cases} x(t, \theta) = x(t) \cos\theta \\ y(t, \theta) = x(t) \sin\theta \\ z(t, \theta) = z(t) \end{cases} \qquad t \in [a, b], \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

2b. Nel caso specifico si ha

$$\phi(t, \theta) = \begin{cases} x(t, \theta) = t \cos\theta \\ y(t, \theta) = t \sin\theta \\ z(t, \theta) = t^2 \end{cases} \qquad t \in [1, 2], \quad \theta \in [0, \pi),$$

e l'elemento d'area è dato da

$$d\sigma = |x(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (z'(t))^2} dt d\theta,$$

quindi

$$d\sigma = t\sqrt{1 + 4t^2}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} Area &= \int_0^\pi \int_1^2 t\sqrt{1 + 4t^2} dt d\theta = \pi \int_1^2 t\sqrt{1 + 4t^2} dt \\ &= \frac{\pi}{8} \frac{2}{3} (1 + 4t^2)^{3/2}|_1^2 = \frac{\pi}{12} (17^{3/2} - 5^{3/2}). \end{aligned}$$

3. La funzione è C^1. Inoltre, $f(0, 0) = 0$, $\nabla f = (2(x - 1) + \sin x, 2y$, e $\nabla f(0, 0) = (-2, 0)$. $\partial_x f(0, 0) \neq 0$, quindi valgono le ipotesi del Dini ed esplicito x in funzione di y, ovvero $x = x(y)$. Si ha che $x(0) = 0$, che $f(x(y), y) = 0$ in un intorno di $y = 0$, e vale $x'(y) = -\frac{\partial_y f}{\partial_x f}$. Quindi $x'(0) = 0$. Derivando $f(x(y), y) = 0$ due volte si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_x^2 f(x(y), y)(x'(y))^2 + \partial_{x,y}^2 f(x(y), y) x'(y) \\ &+ \partial_x f(x(y), y) x''(y) + \partial_{x,y}^2 f(x(y), y) x'(y) + \partial_y^2 f(x(y), y) \end{aligned}$$

in un intorno di $y = 0$, e valutando in $y = 0$, con $\partial_x^2 f = 2 + \cos x$, $\partial_{x,y}^2 f = 0$, e $\partial_y^2 f = 6y$, otteniamo

$$0 = -2x''(y) + 2$$

quindi $x(y) = \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$.

4a. È il numero $R \in [0, \infty]$ tale che la serie converge (assolutamente) se $|x - x_0| < R$, diverge se $|x - x_0| > R$.

4b. Utilizziamo il criterio della radice, e ricordando il limite notevole, si ha

$$\ell = \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-n} = \frac{e^{-2}}{3},$$

pertanto $R = \frac{1}{\ell} = 3e^2$.